Konsultation Mathematik

Leistungskurs

B0

Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik

Auswahl dreier Aufgaben der Jahre 2016 - 2018

Analysis 2016

Für jeden Wert von a

$(a \in \mathbb{R}, a > 0)$

ist die Funktion f_a gegeben durch

$f_a(x) = a \cdot e^{a+x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(-1|f_a(-1))$ wird mit t_a bezeichnet.

1. Weisen Sie nach, dass für jeden Wert von a die Tangente t_a durch die Gleichung $y = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2a \cdot e^{a-1}$ beschrieben werden kann. 3BE

$$f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$$

$$f_a{}'(x) = a \cdot e^{a+x} \rightarrow f_a{}'(-1) = a \cdot e^{a-1} = m$$

$$y = m \cdot x + n \qquad \rightarrow f_a(-1) = a \cdot e^{a-1} \cdot (-1) + n$$

$$\rightarrow a \cdot e^{a-1} = a \cdot e^{a-1} \cdot (-1) + n$$

$$\rightarrow a \cdot e^{a-1} + a \cdot e^{a-1} = 2a \cdot e^{a-1} = n$$

2. Für jeden Wert von a schließen die Tangente t_a und die beiden Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a. 2 BE

$$A_{\Delta S_x S_y O} = \frac{1}{2} \cdot |x_0| \cdot |n| = \frac{1}{2} \cdot |-2| \cdot 2a \cdot e^{a-1} = 2a \cdot e^{a-1}$$

$$S_x: 0 = a \cdot e^{a-1} \cdot x_0 + 2a \cdot e^{a-1} = a \cdot e^{a-1} \cdot (x_0 + 2)$$

$$0 = (x_0 + 2)$$

$$x_0 = -2$$

Analytische Geometrie 2018

Für jeden Wert von $a (a \in \mathbb{R})$ ist eine Gerade g_a gegeben durch

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

1. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Punktes, in dem g_a die xy-Ebene schneidet. 2 BE

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

$$z = 0 = 4 + t \cdot 1 \rightarrow t = -4$$

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ a+4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P(-6|a+4|0)$

2. Für genau einen Wert von a hat die Gerade g_a einen Schnittpunkt mit der z-Achse. Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes. 3 BE

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{I } 0 = 2 + 2t \rightarrow t = -1$$

$$\text{II } 0 = a - 4 - 2t$$

$$\text{III } z = 4 + t \rightarrow z = 3$$

$Q(0|0|3)$

Stochastik 2017

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

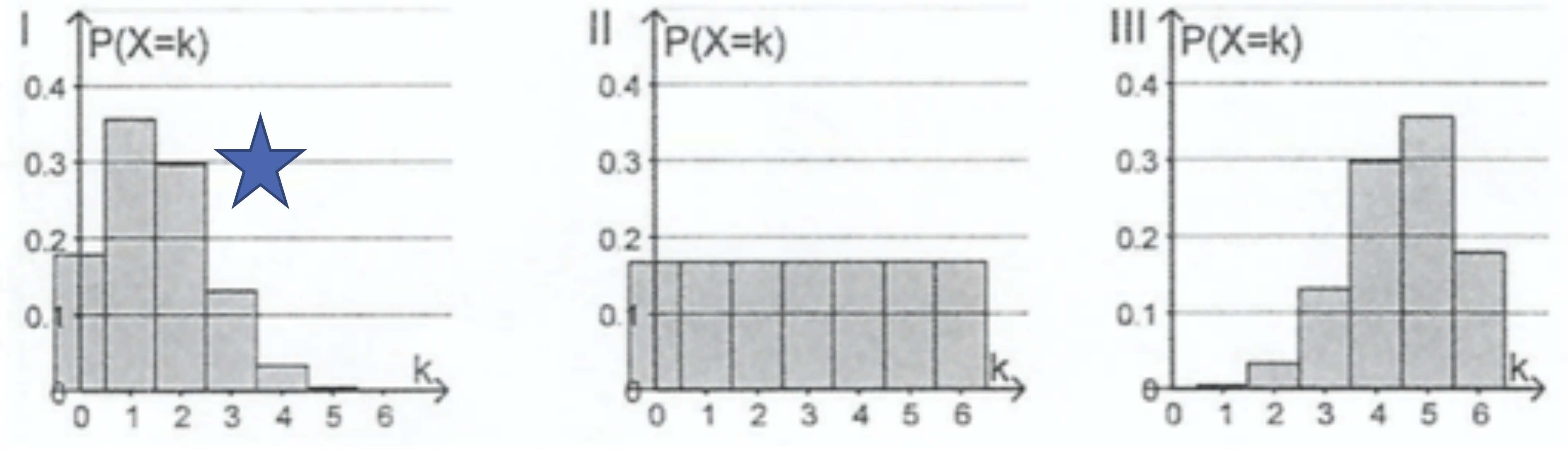
https://www.flickr.com/photos/astridwalter/2834186716/

1. 10 Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt. Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist. 2 BE

$$P(E) = 0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$$

2. 6 Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße dar:

$\mu = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$



Geben Sie an, welche Abbildung dies ist. Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind. 3 BE

Abitur 2019


Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2019

Mathematik mit CAS

Prüfungsaufgaben

B2

Analytische Geometrie und Stochastik

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Package_copter_microdrones_dhl.jpg

Ein Logistikunternehmen testet auf einer Strecke zwischen Festland und einer Insel die Paketzustellung mithilfe eines Flugkörpers, einer sogenannten Drohne. In einem kartesischen Koordinatensystem wird das horizontale Gelände, über dem sich die Drohne bewegt, modellhaft durch die xy-Ebene dargestellt, die Lage des Startplatzes durch den Punkt $S(7320|-1750|0)$ und die Lage des regulären Landesplatzes durch den Punkt $L(-990|6990|0)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

Die Drohne soll über dem Startplatz zunächst vertikal aufsteigen, bis sie eine Höhe von 50 m erreicht hat, und anschließend geradlinig in konstanter Höhe und mit konstanter Geschwindigkeit in die Richtung des Landeplatzes fliegen.

Die vorgesehene horizontale Flugbahn der Drohne verläuft im Modell entlang der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}.$$

2.1

100 Sekunden nachdem die Drohne die Höhe von 50 m erreicht hat, wird ihre Position durch den Punkt $P(6489|-876|50)$ dargestellt.

2.1.1

Zeigen Sie, dass sich die Drohne auf der vorgesehenen Flugbahn befindet.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, der die Position der Drohne nach weiteren 200 Sekunden Flugzeit auf der vorgesehenen Flugbahn darstellt.

3 BE

MATHEMATISCHER OPERATOR

Operator:

Nachweisen/ Begründen/ Zeigen

Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

Lösung 2.1.1 → CAS

Lösung

$r = 0{,}1$

$P_2(4827|872|50)$

2.1.2

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Drohne während des horizontalen Fluges.

2 BE

Operator:

Bestimmen/ Ermitteln

MATHEMATISCHER OPERATOR

Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

SCHLUSSFOLGERUNG

- Physikalische Betrachtung möglich

Lösung 2.1.2 → CAS

Lösung

$$v \approx 12\,\frac{m}{s}$$

Die Drohne soll ihren Weg zum Landeplatz selbstständig zurücklegen können.
Während der Testphase wird ihr Flug jedoch von der Bodenstation aus überwacht und die Flugbahn bei Bedarf korrigiert.
Die Position der Bodenstation wird durch den Punkt $B(0|0|0)$ dargestellt, ihre Reichweite beträgt 6000 m.

2.2

Weisen Sie nach, dass sich die Drohne auf dem horizontalen Teil der vorgesehenen Flugbahn über eine Strecke von mehr als 8,5 km innerhalb der Reichweite der Bodenstation befindet.

5 BE

Lösung 2.2 → CAS

Lösung

$$d \approx 8760 \text{ m}$$

2.3 Eine Korrektur der Bodenstation folgend weicht die Drohne im Modell im Punkt Q(3996|1746|50) von der vorgesehenen Flugbahn ab und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ geradlinig auf einen Ausweichlandeplatz zu, der durch den Punkt A(4050|1810|0) dargestellt wird.

2.3.1

Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Flugbahn gegenüber dem Gelände beim Anflug auf den Ausweichlandeplatz.

3 BE

Operator:

Bestimmen/ Ermitteln

MATHEMATISCHER OPERATOR

Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

SCHLUSSFOLGERUNG

- algebraische Berechnung

Lösung 2.3.1 → CAS

Lösung

$$\varphi \approx 31°$$

2.3.2

Berechnen Sie, um wie viele Meter sich die Flughöhe pro Sekunde verringert.

3 BE

Operator: Berechnen

MATHEMATISCHER OPERATOR

Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.

SCHLUSSFOLGERUNG

- Ansatz muss mathematisch einwandfrei notiert werden
- algebraische Berechnung notwendig

Lösung 2.3.2 → CAS

Lösung

$$v_{\perp} \approx 2{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2.4 In der Nähe der Startplatzes der Drohne auf dem Festland befindet sich ein Schwimmbad.
Für das Schwimmbad besitzen 2000 Personen eine Jahreskarte. Für einen bestimmten Tag beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Jahreskartenbesitzer, die das Schwimmbad besuchen. Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass X binomialverteilt ist. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jahreskartenbesitzer an diesem Tag das Schwimmbad besucht, 10 %.

2.4.1

Es gilt $P(X = 210) \approx 2{,}2\ \%$.

Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.

2 BE

Operator:

Interpretieren/ Deuten

MATHEMATISCHER OPERATOR

Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.

SCHLUSSFOLGERUNG

- Term erläutern
- auf die Bedeutung aller Zeichen eingehen

Lösung

Die Wahrscheinlichkeit P, dass genau 210 Jahreskartenbesitzer an einem bestimmten Tag das Schwimmbad besuchen, beträgt circa 2,2 Prozent.

2.4.2

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am betrachteten Tag mehr als 210 Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen.

2 BE

Lösung 2.4.2 → CAS

Lösung

$$B_{2000,0,1}(X < 210) \approx 0{,}2158$$

2.4.3

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X höchstens um eine halbe Standartabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.

5 BE

Lösung 2.4.3 → TW S. 53

Binomialverteilung (bernoullische oder newtonsche Verteilung)

$b(n; p; k) = B_{n;\,p}(\{k\}) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ $(n, p$ Parameter)

Mögliche Interpretation:
Ziehen aus einer Urne mit weißen und schwarzen Kugeln mit Zurücklegen

p Anteil der weißen Kugeln in der Urne $\quad$ n Anzahl der gezogenen Kugeln
k Anzahl der gezogenen weißen Kugeln

Es gilt: $b(n; p; k) = b(n; 1-p; n-k)$

Erwartungswert und **Varianz:**
$\mu = n \cdot p \qquad \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

Summierte binomiale Wahrscheinlichkeiten:

$B(n; p; k) = B_{n;\,p}(\{0; 1; 2; \ldots; k\}) = P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$

Lösung

$$P(194 \leq X \leq 206) \approx 37{,}2\%$$

2.4.4

Bestimmen Sie die größte natürliche Zahl k, für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am betrachteten Tag weniger als k Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen, kleiner als 10 % ist.

3 BE

Operator:

Bestimmen/ Ermitteln

MATHEMATISCHER OPERATOR

Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

SCHLUSSFOLGERUNG

- Systematisches Probieren möglich!

Lösung 2.4.4 → CAS

$$P_{2000;0,1}(X < k) < 0{,}1$$

Lösung

$$k = 183$$

2.4.5

Beschreiben Sie im Zusammenhang ein Zufallsexperiment, das durch das abgebildete Baumdiagramm dargestellt wird.

Geben Sie ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit $1-(r+s)$ beträgt.

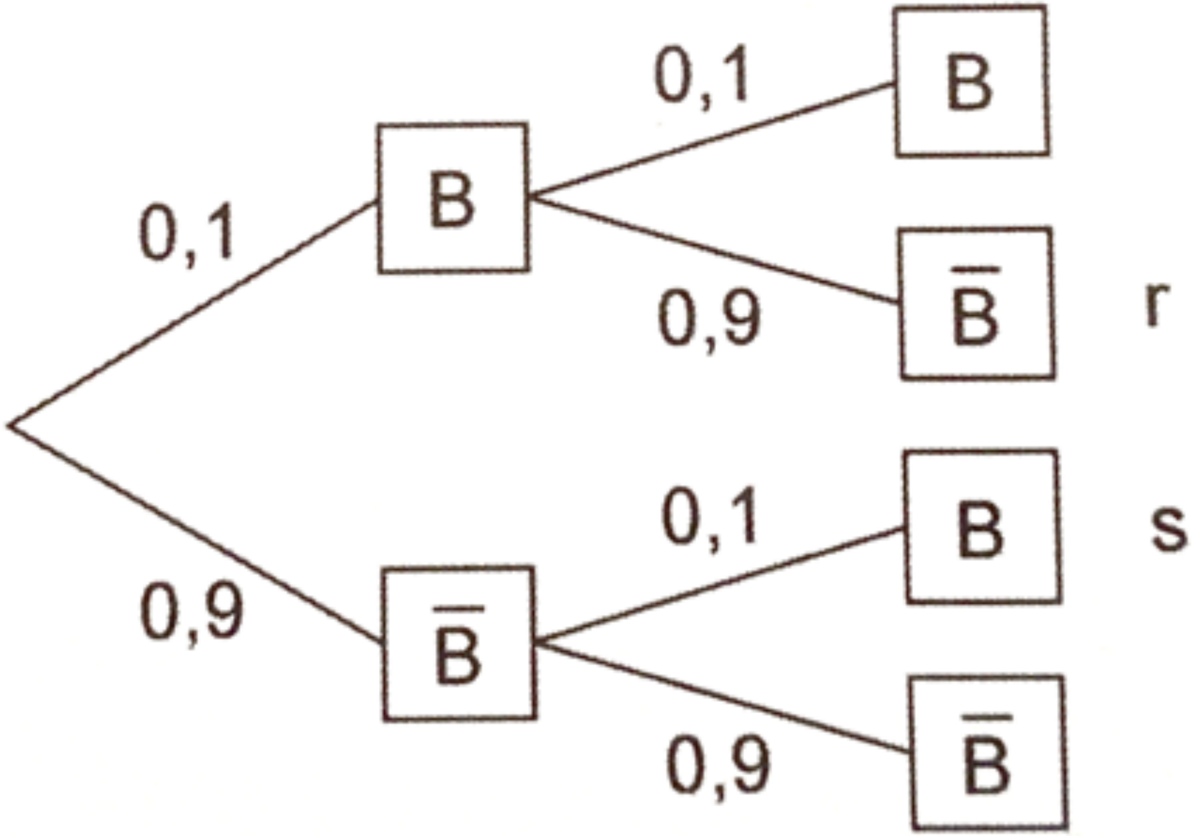
2 BE

Operator:

Beschreiben

MATHEMATISCHER OPERATOR

Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.


0,1
B
0,1
B
0,9
$\bar{B}$
r
0,9
$\bar{B}$
0,1
B
s
0,9
$\bar{B}$

Lösung

Zwei Jahreskartenbesitzer werden zufällig ausgewählt.

Beide oder keiner der ausgewählten Personen besuchen das Bad.

$$\text{solve}\left(\begin{bmatrix}6489\\-876\\50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7320\\-1750\\50\end{bmatrix}+r\cdot\begin{bmatrix}-8310\\8740\\0\end{bmatrix},r\right) \qquad r=\frac{1}{10}$$

$$\begin{bmatrix}7320\\-1750\\50\end{bmatrix}+\frac{3}{10}\cdot\begin{bmatrix}-8310\\8740\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4827\\872\\50\end{bmatrix}$$

$$\frac{\text{norm}\left(\begin{bmatrix}6489\\-876\\50\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7320\\-1750\\50\end{bmatrix}\right)}{100} \qquad \frac{\sqrt{1454437}}{100}$$

$$\frac{\text{norm}\left(\begin{bmatrix}6489\\-876\\50\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7320\\-1750\\50\end{bmatrix}\right)}{100} \qquad 1.20600041459\text{E}1$$

$$\text{solve}\left(\text{norm}\left(\begin{bmatrix}7320\\-1750\\50\end{bmatrix}+r\cdot\begin{bmatrix}-8310\\8740\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right)\leq 6000,r\right) \qquad \frac{-\left(\sqrt{279185957426}-761242\right)}{1454437}\leq r\leq\frac{\sqrt{279185957426}+761242}{1454437}$$

$$\text{solve}\left(\text{norm}\left(\begin{bmatrix}7320\\-1750\\50\end{bmatrix}+r\cdot\begin{bmatrix}-8310\\8740\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right)\leq 6000,r\right) \qquad 1.60104215998\text{E}{-1}\leq r\leq 8.86681584968\text{E}{-1}$$

$\operatorname{solve}\left(\operatorname{norm}\left(\begin{bmatrix}7320\\-1750\\50\end{bmatrix}+r\cdot\begin{bmatrix}-8310\\8740\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right)\le 6000,r\right)$	$1.60104215998E-1\le r\le 8.86681584968E-1$
$\begin{bmatrix}7320\\-1750\\50\end{bmatrix}+\frac{-\left(\sqrt{279185957426}-761242\right)}{1454437}\cdot\begin{bmatrix}-8310\\8740\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{8310\cdot\sqrt{279185957426}}{1454437}+\frac{4320557820}{1454437}\\\frac{4107990330}{1454437}-\frac{8740\cdot\sqrt{279185957426}}{1454437}\\50\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}7320\\-1750\\50\end{bmatrix}+\frac{-\left(\sqrt{279185957426}-761242\right)}{1454437}\cdot\begin{bmatrix}-8310\\8740\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5.98953396506E3\\-3.50689152176E2\\5.E1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}7320\\-1750\\50\end{bmatrix}+\frac{-\left(\sqrt{279185957426}-761242\right)}{1454437}\cdot\begin{bmatrix}-8310\\8740\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{8310\cdot\sqrt{279185957426}}{1454437}+\frac{4320557820}{1454437}\\\frac{4107990330}{1454437}-\frac{8740\cdot\sqrt{279185957426}}{1454437}\\50\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}7320\\-1750\\50\end{bmatrix}+\frac{-\left(\sqrt{279185957426}-761242\right)}{1454437}\cdot\begin{bmatrix}-8310\\8740\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5989.53396506\\-350.689152176\\50.\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}7320\\-1750\\50\end{bmatrix}+\frac{\sqrt{279185957426}+761242}{1454437}\cdot\begin{bmatrix}-8310\\8740\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-48.3239710847\\5999.59705262\\50.\end{bmatrix}$
$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}5989.533965055\\-350.6891521757\\50.\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-48.3239710847\\5999.5970526209\\50.\end{bmatrix}\right)$	8762.52608212
$\sin^{-1}\left(\frac{\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}4050\\1810\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3996\\1746\\50\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)}{\text{norm}\left(\begin{bmatrix}4050\\1810\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3996\\1746\\50\end{bmatrix}\right)\cdot\text{norm}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)}\right)$	-30.8415403295
binomCdf(2000,0.1,211,2000)	0.215785059454
$2000\cdot 0.1$	200.
$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2000\cdot 0.1\cdot(1-0.1)}$	6.7082039325
binomCdf(2000,0.1,194,206)	0.371920571041
binomCdf(2000,0.1,0,200)	0.518820429509

binomCdf(2000,0.1,211,2000)	0.215785059454
$2000 \cdot 0.1$	200.
$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2000 \cdot 0.1 \cdot (1-0.1)}$	6.7082039325
binomCdf(2000,0.1,194,206)	0.371920571041
binomCdf(2000,0.1,0,200)	0.518820429509
binomCdf(2000,0.1,0,150)	0.000063779165
binomCdf(2000,0.1,0,180)	0.071430837818
binomCdf(2000,0.1,0,190)	0.240987395594
binomCdf(2000,0.1,0,185)	0.139481371718
binomCdf(2000,0.1,0,183)	0.108358101807
binomCdf(2000,0.1,0,182)	0.094790558053

Viel Erfolg bei der weiteren Vorbereitung!

Hinweise zum Aufgabenpool und den Operatoren:

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik